



Suites

1. Rappels sur les suites

A. Différentes façons de définir une suite

Définition 4.1 Une suite numérique peut être définie :

- Soit de façon **explicite**, où on a une "formule" qui, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ donne directement u_n
- Soit **par récurrence**, où on donne le premier terme (par exemple u_0), et une formule qui permet de calculer chaque terme en fonction du précédent : u_{n+1} en fonction de u_n

Exercice 4.1 Vérifiez, quitte à vous référer à des tutoriels vidéo en ligne, que vous savez utiliser votre calculatrice pour étudier des suites. A la calculatrice (ou à la main), donnez les cinq premiers termes des suites suivantes :

- Calculer les cinq premiers termes de la suite définie par : $v_n = \frac{n+3}{n+1}$
 - $v_0 = \dots\dots\dots$
 - $v_1 = \dots\dots\dots$
 - $v_2 = \dots\dots\dots$
 - $v_3 = \dots\dots\dots$
 - $v_4 = \dots\dots\dots$
- Soit (U) la suite définie par : $u_0 = 2$, et $u_{n+1} = 2 \times u_n - 1$. Calculer :
 - $u_1 = \dots\dots\dots$
 - $u_2 = \dots\dots\dots$
 - $u_3 = \dots\dots\dots$
 - $u_4 = \dots\dots\dots$

B. Sens de variation d'une suite

Définition 4.2 La plupart des suites ne sont pas monotones, cependant :

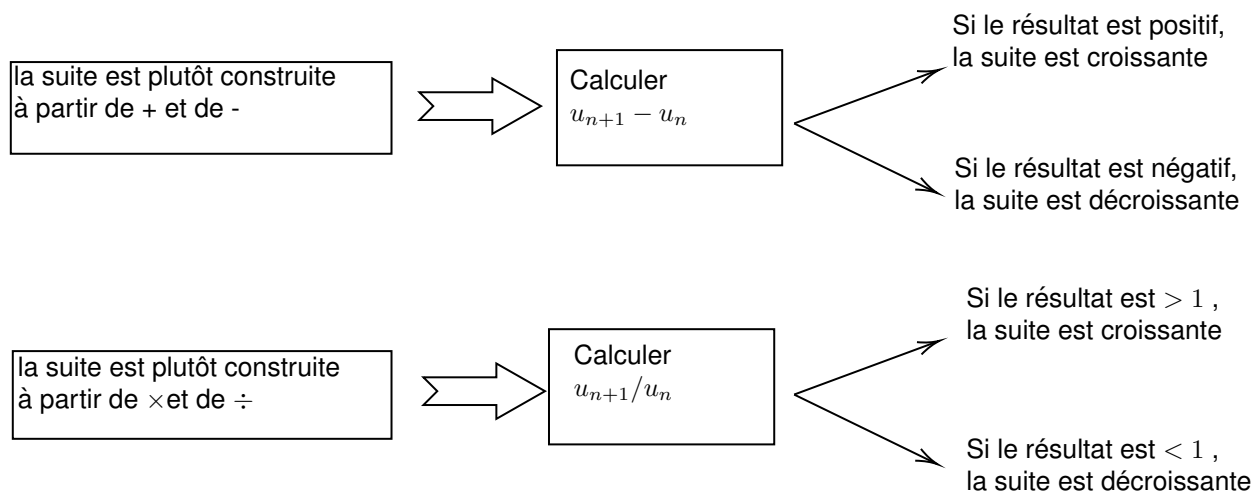
Une suite est dite **croissante** ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$,

décroissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$,

stationnaire ssi $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$.

Méthode Pour les suites à termes positifs.

Attention, on donne ces stratégies à titre indicatif : une suite peut sembler "être fabriquée à partir de + et de -", et pourtant c'est $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ qu'il faudra calculer pour trouver son sens de variation, et inversement...



Exercice 4.2 Par le calcul, à l'aide la méthode ci-dessus, dire si les suites proposées sont croissantes, décroissantes, ou ni l'un ni l'autre (dans ce cas on dit que la suite n'est **pas monotone**) :

- $u_n = (1,5)^n$

.....

- $u_{n+1} = u_n + 4$

.....

Il est toujours raisonnable de tracer la suite sur sa calculatrice pour vérifier ses résultats.

C. Suites arithmétiques, suites géométriques

Suites arithmétiques	Suites géométriques
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$ raison r	$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q \times u_n$ raison q
$u_n = u_0 + n \times r$	$u_n = u_0 \times q^n$
$\Sigma = N \times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$ N= nbre de termes	$\Sigma = \text{premier terme} \times \frac{1-q^N}{1-q}$ N= nbre de termes

Exercice 4.3 Pour chaque situation ci-dessous, indiquer si elle peut être modélisée par une suite arithmétique ou géométrique, et donner la définition de u_n ($u_0 = \dots$ et $u_{n+1} = \dots$).

1. Le loyer de Mathilde augmente de 50 euros à chaque fin d'année.

.....

2. Thomas a placé 2 000 euros sur un compte épargne rémunéré à 1% d'intérêt par an pendant dix ans.

.....

Calculer de quelle somme il dispose au bout de dix ans.

.....

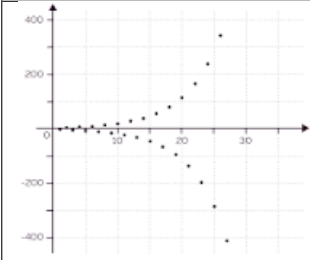
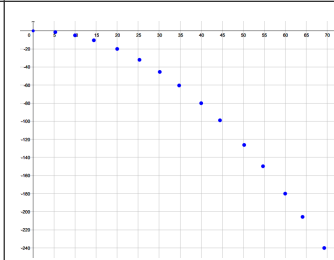
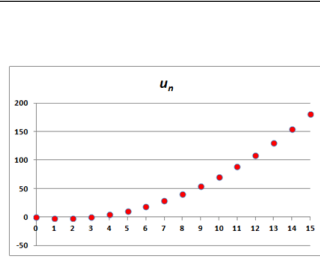
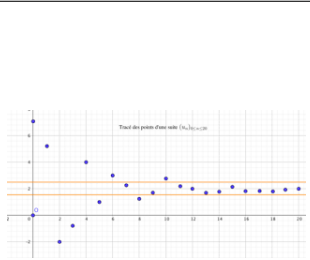
3. Tous les ans, une ville perd $\frac{1}{10}$ de sa population.

2. Limites de suites

A. Définition

Définition 4.3 La limite d'une suite traduit son comportement "quand n devient très grand" (on dit "quand n tend vers l'infini").

- La plupart des suites ont un comportement très "désordonné", on dit qu'elles **divergent**.
- Si la valeur de u_n quand n tend vers l'infini devient très grande sans "plafonner", on dit que u_n **diverge vers** $+\infty$. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- Si la valeur de u_n quand n tend vers l'infini devient très grande *en négatif* sans "plafonner", on dit que u_n **diverge vers** $-\infty$. On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
- Si la valeur de u_n quand n tend vers l'infini se rapproche de plus en plus d'un nombre réel fini ℓ , on dit que la suite converge vers ℓ . On note $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Suite divergente (DV)	Suite DV $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$	Suite DV $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$	Suite convergente (CV) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$
			

Exercice 4.4 En traçant les termes des suites ci-dessous sur votre calculatrice, conjecturer si elles convergent, divergent, et leur limite éventuelle.

1. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n$

2. $u_n = (-1, 2)^n$

3. $u_n = n^3 - 2n + 5$

4. $u_0 = 0.4$ et $u_{n+1} = 2u_n^2$

5. Reprendre la question précédente avec $u_0 = 0.6$.

B. Calcul de la limite d'une suite convergente

Propriété 4.1 Limite des suites de référence. Pour $k \geq 1$, on a :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = +\infty$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0$

L'idée générale, même si ceci n'est pas une formulation rigoureuse, est de considérer que $\frac{1}{0} = \infty$ et que $\frac{1}{\infty} = 0$ (voir la courbe de la fonction inverse).

Dans les tableaux suivants, ℓ et ℓ' sont des nombres réels finis. Ces tableaux résument les propriétés à connaître sur les sommes, produits et quotients de limites de deux suites u et v .

Lorsque les cases contiennent "F.I.", il s'agit d'une *forme indéterminée* : cela ne signifie pas que la suite n'a pas de limite mais qu'on ne peut pas conclure (cela dépend des cas).

Ces propriétés sont valables pour des limites en $+\infty$, en $-\infty$ ou en a . Lorsque les cases contiennent « F.I. », il s'agit d'une forme indéterminée : on ne peut pas conclure (ça dépend des cas).

Limite d'une somme

Si u a pour limite	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si v a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors, $u + v$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Exercice 4.5 Déterminer par le calcul les limites des suites (lorsque c'est possible) :

• $u_n = n^2 + \sqrt{n}$

• $u_n = n^2 + \frac{1}{n}$

• $u_n = -n^3 + n^2$

Limite d'un produit

Si u a pour limite	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si v a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$u \times v$ a pour limite	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Exercice 4.6 Déterminer par le calcul les limites des suites (lorsque c'est possible) :

- $u_n = n^2 \times \sqrt{n}$

.....

- $u_n = n^2 \times \frac{1}{n}$

.....

- $u_n = -n^3 \times n^2$

.....

Limite d'un quotient avec un dénominateur de limite non nulle

Si u a pour limite	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
et si v a pour limite	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\pm\infty$
$\frac{u}{v}$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Exercice 4.7 Déterminer par le calcul les limites des suites (lorsque c'est possible) :

- $u_n = \frac{2 - \frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$

.....

- $u_n = \frac{n^2+1}{5+\frac{1}{n}}$

.....

- $u_n = \frac{n^2+1}{n^3+2n+1}$

.....

Limite d'un quotient avec un dénominateur de limite nulle

Si u a pour limite	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
et si v a pour limite	0 en restant positive	0 en restant négative	0 en restant positive	0 en restant négative	0
$\frac{u}{v}$ a pour limite	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

Exercice 4.8 Déterminer par le calcul les limites des suites (lorsque c'est possible) :

- $u_n = \frac{2 - \frac{1}{n}}{\sqrt{n}}$

.....

- $u_n = \frac{n^2+1}{\frac{1}{n^2}}$

.....

Les cas de formes indéterminées sont au nombre de quatre :

- $\infty - \infty$
- $0 \times \infty$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $\frac{0}{0}$

Pour calculer une telle limite, il faut souvent transformer l'écriture algébrique de u_n et utiliser un théorème comme ceux étudiés dans la suite de ce chapitre.

Limite d'un polynôme, d'une fraction rationnelle

Propriété 4.2 Soit u une suite définie par $u_n = f(n)$ avec f une fonction polynomiale :

$$f(x) = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Alors la limite de la suite u lorsque n tend vers $+\infty$ est la limite de $(a_p n^p)$ lorsque n tend vers $+\infty$. (On dit que sa limite est celle de son terme de plus haut degré).

Exemple 4.1 Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n^5 - 6n^4 - 25n^3 - 36n^2 + 3n + 1$. On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3n^5 = +\infty$$

Exercice 4.9 reprise d'une F.I. précédente $u_n = -n^3 + n^2$

.....

Exercice 4.10 Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2n^3 - 15n^2 + 3n$. Étudier la limite de la suite u lorsque n tend vers $+\infty$.

.....

Propriété 4.3 Soit u une suite définie par $u_n = \frac{a_p n^p + a_{p-1} n^{p-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + b_{q-1} n^{q-1} + \dots + b_1 n + b_0}$. La limite lorsque n tend vers $+\infty$ de u_n est la limite du quotient simplifié $\frac{a_p n^p}{b_q n^q}$.

On dit que la limite de u est la limite du quotient simplifié des termes de plus haut degré.

Exemple 4.2 Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{3n^2 - 5n + 1}{n^4 + n^2 + 1}$. On a alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2}{n^4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^2} = 0$$

Exercice 4.11 reprise d'une F.I. précédente $u_n = \frac{n^2 + 1}{n^3 + 2n + 1}$

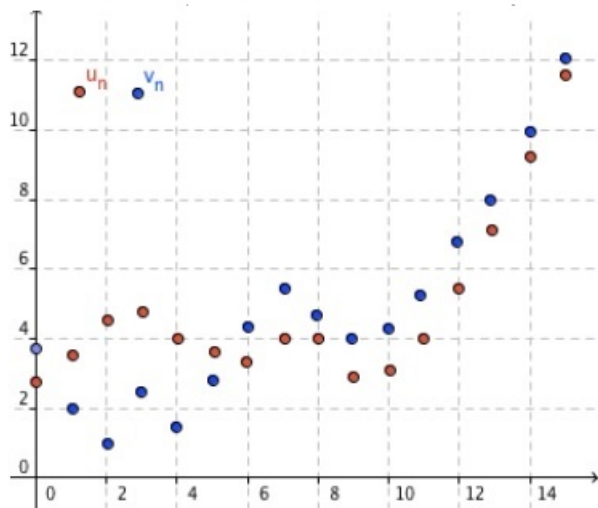
.....

Exercice 4.12 Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n^3 + 3n^2 + 2n}{n^2 + 1}$. Étudier la limite de la suite u lorsque n tend vers $+\infty$.

.....

C. Limites et inégalités : théorèmes de comparaison

Propriété 4.4 Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$.
Alors si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.



Exercice 4.13 Soient $v_n = n + \cos\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$ et $u_n = n - 1$.

1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

.....

.....

.....

2. Démontrer que pour tout n , $v_n \geq u_n$.

.....

.....

.....

3. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

.....

.....

.....

Propriété 4.5 Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$.
Alors si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

Faire un exemple de figure correspondante :

Exercice 4.14 Soient $v_n = \cos\left(\frac{\pi}{4}n^2\right) - n$ et $u_n = 1 - n$.

1. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

.....

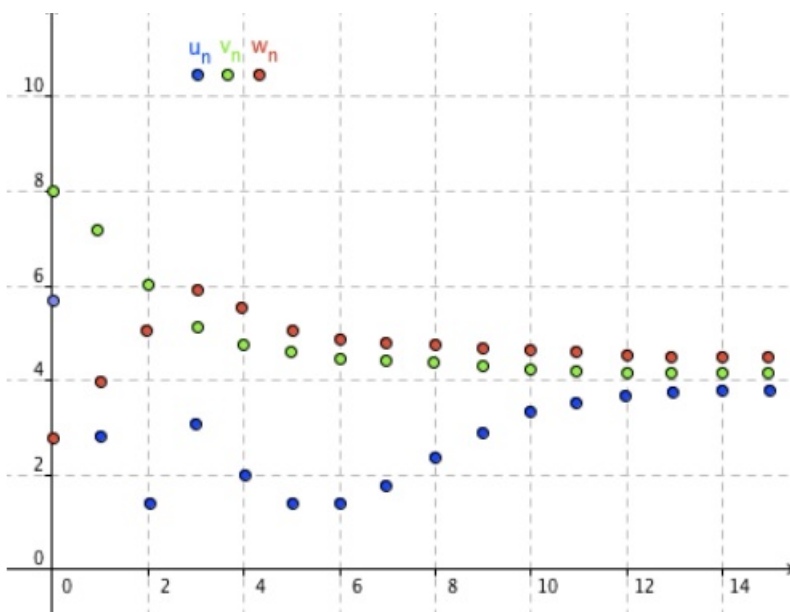
2. Démontrer que pour tout n , $v_n \leq u_n$.

.....

3. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

.....

Propriété 4.6 Théorème des gendarmes Soit (v_n) une suite dont on souhaite déterminer la limite ℓ . Si on arrive à trouver deux suite (u_n) et (w_n) qui tendent vers ℓ (ce sont les "gendarmes") et telles qu'à partir d'un certain rang (v_n) soit "coincée" entre (u_n) et (w_n) (c'est-à-dire $u_n \leq v_n \leq w_n$), Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$.



Exercice 4.15 On considère la suite $v_n = \frac{\cos\left(\frac{5\pi}{3n+1}\right)}{n^3}$.

1. Justifier que pour tout n , $\frac{-1}{n^3} \leq v_n \leq \frac{1}{n^3}$.

.....

2. Déterminer la limite de chacune des suites $u_n = \frac{-1}{n^3}$ et $w_n = \frac{1}{n^3}$.

.....

3. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

.....

.....

.....

.....

D. Limites de suites arithmétiques, de suites géométriques

Propriété 4.7 La limite d'une suite arithmétique ($r \neq 0$) est :

- $+\infty$ si la raison r est positive
- $-\infty$ si la raison r est négative

Propriété 4.8 La limite d'une suite géométrique ($q \neq 1$) est :

- $+\infty$ si $q > 1$
- 0 si $-1 < q < 1$ (on peut aussi écrire $|q| < 1$)
- non définie si $q \leq -1$ (la suite diverge voire "explose" si $q < -1$)

Exercice 4.16 Déterminer la limite de la suite $u_n = \frac{0,5^n - 0,2^n}{2^n + 1}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. Suites arithmético-géométriques

Définition 4.4 On appelle suite **arithmético-géométrique** une suite récurrente de la forme

$$u_{n+1} = au_n + b$$

L'étude d'une telle suite se fait en respectant un "plan d'étude", que nous allons découvrir sur un exemple :
Soit la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n : u_{n+1} = 0.5u_n + 2$ (F)

1. On cherche un "**point fixe**", c'est-à-dire un réel α qui vérifie la formule (F) dans laquelle on aurait remplacé à la fois u_{n+1} et u_n par α .

Écrire la formule (F) en effectuant ces "remplacements" :

Résoudre l'équation d'inconnue α ainsi obtenue :

.....

.....

.....

.....

.....

2. On va définir une **suite auxiliaire** (v_n) en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \alpha$. Quelle suite (v_n) obtient-on dans notre exemple ?

.....

.....

.....

.....

-
-
-
-

-
-
-
-

-
-
-
-

-
-
-
-

Exercice 4.17 Une grande université accueillait 27 500 étudiants en septembre 2019. La capacité d'accueil de ce campus ne peut excéder 33 000 étudiants.
D'après une étude statistique, chaque année, 156 étudiants démissionnent en cours d'année universitaire. De plus, chaque année, les effectifs sont en augmentation de 4% par rapport à l'année précédente. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n le nombre d'étudiants estimé durant l'année 2019 + n : u_0 représente la population universitaire en 2019, u_1 la population en 2020, etc...
Justifier qu'il s'agit d'une suite arithmético-géométrique, étudiez-la, et déterminez l'année à partir de laquelle la capacité maximale de 33 000 étudiants sera dépassée.

[illegible]

[illegible][illegible]